29 Pages

100 S.P

وظائف

رياضيات 3

- هندسة فراغية
- تكامل ثنائي
- تكامل ثلاثي
- تكامل خطي و سطحي
- تحليل شعاعي

هندسة الميكانيك العام

السنة الثانية

#VivaRBCs

فريق الكريات الحمراء التطوعي

RBCs HAMAK

حل وظائف التكاملات الثنائية

حل وظيفة المحاضرة الأولى :

أوجد معادلات المستقيم المماسي للمنحني :

$$\vec{r}_{(t)} = \begin{cases} \vec{x}(t) = t.\vec{i} \\ \vec{y}(t) = e^{t}.\vec{j} \\ \vec{z}(t) = (t^2+1).\vec{k} \end{cases}$$

وذلك بعد التأكد من صقالته عند النقطة t=0

نلاحظ ان المعادلات الممثلة لهذا المنحني بدلالة الوسيط t هي عبارة عن مجموعة من التوابع الصحيحة والاسية ونعلم ان التابع الصحيح و الاسي (اسه موجب) معرف و مستمر عند قيم t اما المشتقات فهي :

$$\dot{\vec{r}}_{(t)} = \begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = 1.\vec{i} \\ \dot{\vec{y}}(t) = e^{t}.\vec{j} \\ \dot{\vec{z}}(t) = 2t.\vec{k} \end{cases}$$

وهي أيضا مشتقاتها موجودة , مشتقاتها موجودة أيا كانت قيمة الوسيط t

فالشرط الأول محقق ونلاحظ انه لا يوجد قيمة ل t تعدم المشتقات الثلاثة معا اذا

فالشرط الثاني محقق واذا اخذنا قيمتين مختلفتين ل t و طابقنا بين $\vec{z}_{(t1)}$ و $\vec{z}_{(t2)}$،

يكون :

$$2t_1 \neq 2t_2 \quad \leftrightarrow \quad t_1 \neq t_2$$

وكذلك بالنسبة ل x,y

$$t_1 \neq t_2$$
$$e^{t_1} \neq e^{t_2}$$

اذا الشروط اللازم ليكون المنحني صقيل محقق

والان لنوجد معادلات المستقيم المماسي من النقطة t=0 نعوض في كل من $\vec{r}_{(t)}$ و $\dot{\vec{r}}_{(t)}$، نجد :

$$t=0 \rightarrow \overrightarrow{r_{(0)}} = \begin{cases} \overrightarrow{x_{(0)}} = 0\vec{i} \\ \overrightarrow{y_{(0)}} = e^0 = 1\vec{j} \\ \overrightarrow{z_{(0)}} = 1\vec{k} \end{cases} \rightarrow r'_{(0)} = \begin{cases} x'_{(0)} = 1 \\ y'_{(0)} = 1 \\ z'_{(0)} = 0 \end{cases}$$

تعطى معادلات المستقيم في الفراغ بالشكل وسيطياً :

$$\frac{x-x_0}{x'_{(0)}} = \frac{y-y_0}{y'_{(0)}} = \frac{z-z_0}{z'_{(0)}} = t$$

$$z - z_{(0)} = t.z'_{(t)}$$

نعوض:

$$z-1 = t.0 \rightarrow z = 1$$

$$\frac{x-x_0}{x'_{(0)}} = t \rightarrow x - 0 = 1t \rightarrow x = t \quad \ldots .1$$

$$\frac{y-y_0}{y'_{(0)}} = t \rightarrow \frac{y-1}{1} = t \rightarrow y = 1 + t \quad \ldots .2$$

2-اوجد معادلات المستقيم المماسي للمنحني:

$$r = \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^2 \\ z = \cos(t) \end{cases}$$

وذلك عند نقطة منه $p(x_0,y_0,z_0)$

الحل:

إن كل مشتقات مركبات المستقيم ومركباته معرفة ومستمرة وموجودة أيا كانت قيمة الوسيط **t**

وأيا كانت النقطة حيث أن كلا منهم عبارة عن إما توابع صحيحة أو توابع مثلثية

المستقيم المماس للمنحني في النقطة $p(x_0, y_0, z_0)$ بالشكل:

$$\frac{x - x_0}{x'(t)} = \frac{y - y_0}{y'(t)} = \frac{z - z_0}{z'(t)}$$

$$r'(t) = \begin{cases} x = 4t^3 \\ y = 2t \\ z = -sin(t) \end{cases}$$

و إن المشتقات الجزئية

لا تنعدم أبدا باستثناء نقطة واحدة هي عندما تكون $t = 0$

عندها إذا المنحني صقيل أيا كانت قيمة **t** باستثناء $t = 0$ وتعطى المعادلات

لنوجد معادلات المستقيم مثلا عند **t=1** أي عند أي قيمة ما عدا **t=0**

$$r(t = 1) = \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = cos(1) \end{cases}$$

$$r'_{(t=1)} = \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -sin(1) \end{cases}$$

اذا معادلات المستقيم المماس هي:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - cos(1)}{-sin(1)}$$

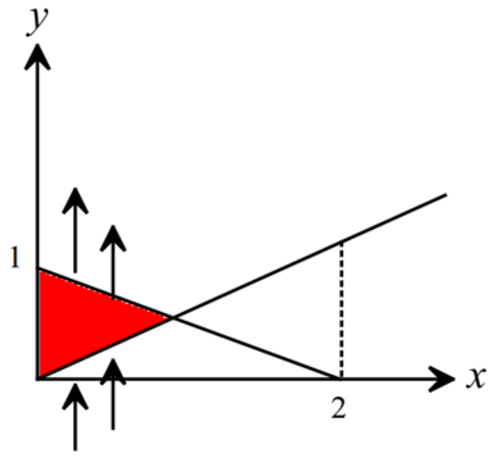
وهو المطلوب.

حل وظيفة المحاضرة الثانية:

احسب قيمة التكامل الثنائي التالي:

$$I = \iint_D (2 - x - 2y)dydx$$

$$D = \begin{cases} x = 2y \\ x + 2y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$



لنوجد نقاط تقاطع المستقيمين: $y = \frac{2-x}{2}, y = \frac{x}{2}$

$$2y + 2y = 2$$

$$2y = 1 \leftrightarrow y = \frac{1}{2} \leftrightarrow x = 1$$

نثبت الـx بين 0 و 1 ونجعل y تتغير بين : $y = \frac{2-x}{2}, y = \frac{x}{2}$

$$I = \int_0^1 \left[\int_{y=\frac{x}{2}}^{y=\frac{2-x}{2}} (2 - x - 2y)\, dy \right] dx$$

$$I = \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{\frac{x}{2}}^{\left(1-\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$I = \int_0^1 [2 - x - x + \frac{x^2}{2} - 1 + x - \frac{x^2}{4} - (x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4})]dx$$

$$I=\int_0^1 1-2x+x^2dx=\left[x-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=1-1+\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

حل وظيفة المحاضرة الخامسة :

أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}}$$

$$D\equiv\{x^2+y^2\le a^2\}$$

الحل:

لننتقل إلى الإحداثيات القطبية فيكون التكامل:

$$I=\iint \frac{rd(r)d(\theta)}{r^{\frac{3}{2}}}$$

وإن $x^2+y^2\le a^2$ وهي عبارة عن مجموعة من النقاط داخل الدائرة نصف قطرها **a** ومركزها $(0,0)$ لذلك تكون $0\le\theta\le 2\pi$ ونصف القطر بين أصغر قيمة له و هي الصفر إلى أكبر قيمة له وهي ال**a** لكن التكامل شاذ عند النقطة $o(0,0)$ إذ إن هذه النقطة تعدم المقام

$$I=\lim_{\delta N\to 0}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\delta N}^{a}\frac{\mathrm{r}}{(\mathrm{r})^{\frac{3}{2}}}d(r)\right]d(\theta)$$

$$I=\int_0^{2\pi}d(\theta)\lim_{\delta N\to 0}\int_{\delta N}^{a}\frac{r}{(r)^{\frac{3}{2}}}d(r)$$

$$I = 2\pi(\lim_{\delta N\to 0}(\left[2r^{\frac{1}{2}}\right]_{\delta N}^{a}))$$

$$I = 2\pi(\lim_{\delta N\to 0}(2\sqrt{a} - 2\sqrt{\delta N})) = 4\pi\sqrt{a}$$

أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$2)\ \iint\limits_{D} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} d(x)d(y)$$

حيث أن D هي الربع الموجب من المستوي XOY

الحل:

ننتقل إلى الاحداثيات القطبية ونلاحظ أن $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ لأنها تقع في الربع الأول من المستوي XOY الموجب أما بالنسبة ل r فنجد أنها تبدأ بالقيمة صفر و تنتهي في اللانهاية لذلك فإن هذا التكامل يعتبر تكامل شاذ من النوع الثاني نعوض في التكامل فنجد:

$$I = \lim_{\delta N\to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\delta N} \frac{r^3 COS(\theta)Sin(\theta)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)\right] d(\theta)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} COS(\theta)Sin(\theta)d(\theta) \lim_{\delta N\to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r^3}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$I_1 = \lim_{\delta N\to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r^3}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r) = \lim_{\delta N\to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r(r^2+1-1)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$I_1 = \lim_{\delta N\to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r(r^2+1)-r}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$= \lim_{\delta N\to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r(r^2+1)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$I_1 = \lim_{\delta N \to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \lim_{\delta N \to +\infty} \int_0^{\delta N} \frac{2r}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2r}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}} d(r)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \lim_{\delta N \to +\infty} \left[-2(1+r^2)^{\frac{-1}{2}} + \frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{-3}{2}}\right]_0^{\delta N}$$

$$I_1 = \lim_{\delta N \to +\infty} \left(-(1+\delta N^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(1+\delta N^2)^{-\frac{3}{2}}\right) - (-1 + \frac{1}{3})$$

$$I_1 = \frac{2}{3} - (0) = \frac{2}{3}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} COS(\theta) Sin(\theta) d(\theta) = \frac{1}{2}[-COS^2(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

$$I = I_1 \times I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

أوجد قيمة التكامل الآتي :

$$I = \iint_D \frac{y}{x^2} dx\, dy$$

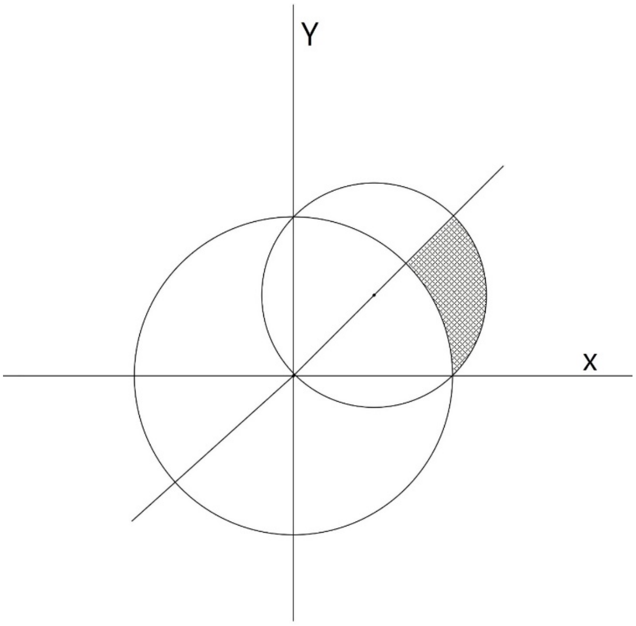
حيث D هي المنطقة الكائنة :

في الربع الموجب للمستوي الإحداثي

خارج الدائرة $x^2 + y^2 = 4$

داخل الدائرة $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

أسفل المستقيم $y = x$



الحل :

إن المنطقة D موضحة بالشكل

الجانبي وكما نلاحظ إن المنطقة

D هي تقاطع دائرتين مع المستقيم المنصف لذا من الصعب حلها ديكارتيا فنلجأ عندئذ للإحداثيات القطبية

و ذلك يتم بالاستبدال التالي :

$$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$$

$$\boldsymbol{y = r\sin\theta}$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^{02}}$$

لنعوض في التكامل المعطى بنص السؤال

مع الانتباه لليعقوبي r ووضعه بالتكامل

$$\boldsymbol{I = \iint \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}\, r dr\, d\theta}$$

لنوجد حدود التكامل:

إن الزاوية θ ((الزاوية المحصورة بين المحور ox الموجب و المستقيم $y = x$)) تتراوح بين ال 0 و $\frac{\pi}{4}$

أي $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

و نصف القطر r محصور بين الدائرتين $x^2 + y^2 = 4$ و

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ لنوجد معادلة هاتين الدائرتين قطبيا و ذلك بالقيام الاستبدال السابق :

الدائرة الأولى: $r = 2 \qquad r^2 = 4$

الدائرة الثانية: $(r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta - 1)^2 = 2$

$$r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta + 1 = 2$$

$$r^2 - 2r(\cos\theta + \sin\theta) = 0$$

$$r\{r - 2(\cos\theta + \sin\theta)\} = 0$$

إما $\quad r = 0$ (مرفوض خارج نطاق التكامل)

أو $\quad \mathrm{r} - 2(\cos\theta + \sin\theta) = 0$

$$r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

لنعوض في التكامل :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_2^{2(\cos\theta+\sin\theta)} \frac{r^2 \sin\theta}{r^2 \cos^2\theta}\, dr\, d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \int_2^{2(\cos\theta+\sin\theta)} dr\, d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} [r]_2^{2(\cos\theta+\sin\theta)}\, d\theta$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} [2(\cos\theta + \sin\theta) - 2]\, d\theta$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta - \sin\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$I = 2\left[-\ln(\cos\theta) + \tan\theta - \theta + \frac{-1}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = 2\left(-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) - 2(-\ln 1 + 0 - 0 - 1)$$

$I = 0.29$

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I = \iint \frac{xy}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} dxdy$$

$$D = y > 0$$

الحل:

لننتقل الى الاحداثيات القطبية

$$I = lim_{\delta n \to \infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\delta n} \frac{r^3.cos\theta.sin\theta dr}{(r^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi} cos\theta.sin\theta d\theta.lim_{\delta n \to \infty} \int_0^{\delta n} \frac{r(r^2+a^2)}{(r^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{a^2 r}{(r^2+a^2)^{\frac{5}{2}}} dr$$

$$I = \int_0^{\pi} cos\theta.sin\theta d\theta lim_{\delta n \to \infty} \left[\frac{2a^2}{3(r^2+a^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} - \frac{2}{\sqrt{r^2+a}}\right]_0^{\delta n}$$

$$I = -\frac{1}{2}[cos^2\theta]_0^{\pi} \, lim_{\delta n \to \infty}\left(\frac{2a^2}{3(\delta n^2+a^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} - \frac{2}{\sqrt{\delta n^2+a}} + \frac{2}{a} - 2a^2/3a\sqrt{a}\right)$$

$$I = (1-1)\left(\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{a}}{3}\right) = 0$$

حل وظيفة المحاضرة السابعة:

احسب المساحة المحصورة بين المنحنيات التالية:

$$D = \begin{cases} x.y = 6 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2x \\ x.y = 3 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y \end{cases}$$

إن كل من المعادلتين $x.y = 6$, $x.y = 3$ تمثلان معادلتان لقطع زائد اذا:

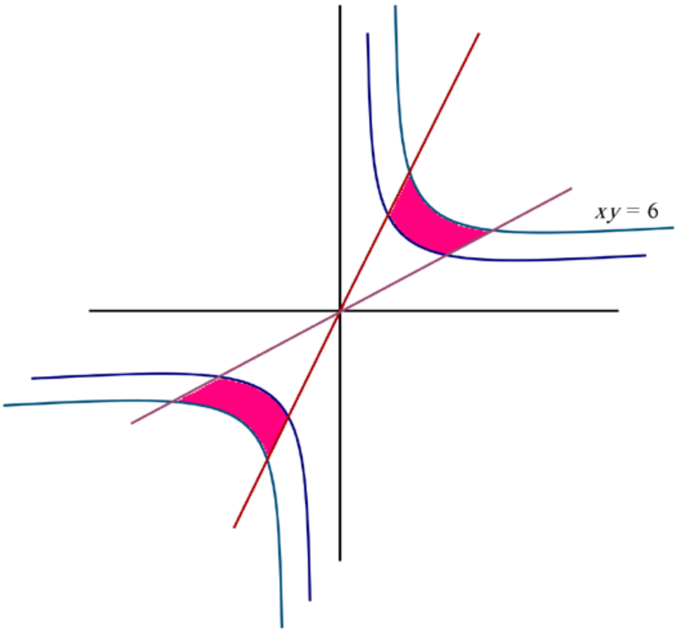
ن كل من المعادلتين $x.y = 6$, $x.y = 3$ تمثلان معادلتان لقطع زائد اذا:

لنحسب مساحة المنحني المطلوب :

الربع الأول.وبعد ذلك نضربها بـ 2 لأن المنحني متناظر

إن المنطقة المحاطة بهذه المنحنيات ليست بسيطة

لنقسم المنطقة إلى ثلاثة أقسام بحيث تصبح كل منطقة بسيطة



لنوجد نقطة تقاطع المستقيم $y = 2x$ مع كل من القطعين

$$x.y = 6\,, y = 2x \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$x_1 = \sqrt{3}$$

$$x.y = 3\,, y = 2x \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

إذا نثبت الــ x بين $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_1 = \sqrt{3}$ وتتغير الــ y بين منحني الدخول $y = \frac{3}{x}$ ومنحني الخروج $y = 2x$

$$I_1 = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{3}} \int_{y=\frac{3}{x}}^{y=2x} dy\,dx$$

$$I_1 = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{3}} 2x - \frac{3}{x} dx$$

$$I_1 = [x^2 - 3\ln x]_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{3}} = 3 - 3\ln\sqrt{3} - \frac{3}{2} + 3\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$I_1 = \frac{3}{2} + 3\ln\sqrt{\frac{3}{2\times 3}} = \frac{3}{2} + 3\ln\sqrt{2}$$

لتحسب المساحة الثانية و نوجد نقط تقاطع المستقيم $y = 2x , x.y = 3$ وقد تم إيجاد نقطة تقاطع المستقيم

$x.y = 3$ مع $y = \frac{x}{2}$

$x^2 = 6 \rightarrow x = \sqrt{6}$

اذا نثبت ال x بين $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ و تتغير ال y بين $x.y = 3$ ومنحني الخروج $y = \frac{6}{x}$ نعوض :

$$I_2 = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \int_{y=\frac{3}{x}}^{y=\frac{6}{x}} dy\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{6}{x} - \frac{3}{x}\right) dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} \frac{3}{x}\,dx$$

$$I_2 = [3\ln(x)]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} = 3\ln\sqrt{6} - 3\ln\sqrt{3} = 3\ln\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 3\ln\sqrt{2}$$

3− لنوجد المساحة الثالثة و نوجد نقط التقاطع

$x.y = 3$ مع $y = \frac{x}{2}$

وقد تم إيجادها ونقطة تقاطع المنحني

$$x.y = 6 \quad \text{مع} \quad y = \frac{x}{2}$$

نعوض

$$\frac{x^2}{2} = 6 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$I_3 = \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \int_{y=\frac{x}{2}}^{y=\frac{6}{x}} dy\, dx = \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{6}{x} - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$I_3 = \left[6\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} = 6\ln 2\sqrt{3} - \frac{12}{4} - 6\ln\sqrt{6} + \frac{6}{4}$$

$$I_3 = 6\ln\sqrt{2} - \frac{3}{2} \leftrightarrow 6\ln\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - 6 = 6ln\sqrt{2} - 6$$

لنوجد التكامل الكلي

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = \frac{3}{2} - 3ln\sqrt{2} + 3ln\sqrt{2} + 6ln\sqrt{2} - \frac{3}{2}$$

$$I = 6ln\sqrt{2} = 3ln2$$

I للجزئين هي

$$I_{total} = 2I = 6ln2$$

<u>**طريقة ثانية:**</u>

لنفرض متحولان جديدان وهما:

$$v = xy$$

$$u = \frac{x}{y}$$

$$x = \frac{v}{y} \rightarrow u = \frac{v}{y^2} \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{v}{u}}$$

$$\mathbf{y = \frac{x}{u} \to v = \frac{x^2}{u} \to x = \pm\sqrt{uv}}$$

نأخذ الجذور الموجبة و من ثم نضرب الجواب النهائي ب **2** لنحصل على التكامل المطلوب:

لنوجد المحدد اليعقوبي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ -\frac{1}{2u}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\frac{1}{u} + \frac{1}{4}\frac{1}{u} = \frac{1}{2u}$$

$$I_1 = \int_3^6 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2u} d(u)d(v) = \frac{1}{2}[\ln(u)]_{\frac{1}{2}}^2 \int_3^6 d(v) = \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)[v]_3^6 = \frac{1}{2} 2\ln(2)(6-3) = 3\ln(2)$$

$$I = 2I_1 = 6\ln(2)$$

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$\mathbf{4\text{-}}\ I = \iint x^2 y^2 d(x)d(y)$$

$$D \equiv 1 \le x^2 + y^2 \le 4$$

الحل:

لننتقل إلى الاحداثيات القطبية ; نعلم أنّ:

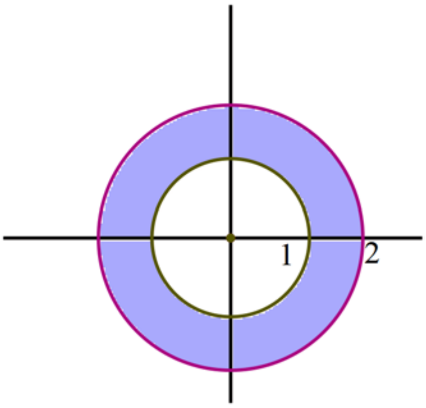
$$x = r.\cos(\theta) \Rightarrow x^2 = r^2.\cos^2(\theta)$$

$$y = r.\sin(\theta) \Rightarrow y^2 = r^2.\sin^2(\theta)$$

$$x^2.y^2 = r^4.\cos^2(\theta).\sin^2(\theta)$$

$$dx\,dy = r dr d\theta$$

$$I = \iint r^5.\cos^2(\theta).\sin^2(\theta)\, dr d\theta$$



لنوجد حدود التكامل:

حسب الرسم : $0 \leq \theta \leq 2\pi$

لإيجاد حدود **r** نأخذ الطرف الأيسر من المتراجحة:

$$1 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 1 \leq r^2$$

وهذه المتراجحة تعني بأننا نريد جميع النقاط الواقعة خارج دائرة نصف قطرها 1

ومركزها مبدأ الإحداثيات

أي أن الحد الأول من حدود **r** هو الواحد.

لنأخذ الطرف الآخر من المتراجحة: $x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow r^2 \leq 4$

وهذه المتراجحة تعني بأننا نريد مجموعة نقاط الدائرة المركزية التي نصف قطرها (2).

وحسب الرسم نجد أن: $1 \leq r \leq 2$

$$I = \int_0^{2\pi} cos^2(\theta).sin^2(\theta)d(\theta)\int_1^2 r^5 d(r)$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(1 - sin^2(\theta)\right).sin^2(\theta)d(\theta)\left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2$$

$$= \int_0^{2\pi} sin^2(\theta) - sin^4(\theta)d(\theta).\left[\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

نعلم أنَّ:

$$\int_0^{2\pi}\sin^4(\theta).d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(\theta).d\theta$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(\theta).d\theta = 4 \times \frac{\pi}{2}\,\frac{(4-1)!!}{4!!} = 2\pi \times \frac{3 \times 1}{4 \times 2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(\theta).d\theta = 4 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \pi$$

$$I = \left((\pi - \frac{3\pi}{4})\frac{63}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{63}{6}\right)$$

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I=\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.dx.dy$$

$$D\equiv\begin{cases}x^2+y^2=e\\x^2+y^2=1\end{cases}$$

الحل:

لنعوض بالإحداثيات القطبية فيكون:

$$1\le r\le\sqrt{e}$$

$$0\le\theta\le 2\pi$$

$$I=\iint_D \frac{\ln(r^2)}{r^2}.r.dr.d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{e}}\frac{2}{r}.\ln r^2.dr$$

$$=\frac{1}{2}(2\pi)\left[\frac{\ln^2 r^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}}=\frac{\pi}{2}[\ln^2(e)-0]$$

$$I=\frac{\pi}{2}.\ln^2 e=\frac{\pi}{2}$$

حل وظائف التكامل الثلاثي:

احسب قيمة التكامل الثلاثي:

$$I = \iiint_D \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

Dهي الثمن الموجب

الحل:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{(r^2+1)^2}$$

تكامل مباشرة:

$$I = \frac{\pi}{2} . 1 . \int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{(r^2+1)^2}$$

وبتفريق الكسور:

$$\frac{r^2}{(r^2+1)^2} = \frac{Ar + a}{r^2 + 1} + \frac{Br + b}{(r^2+1)^2}$$

$$A = 0, a = 1, B = 0, b = -1$$

بالتعويض:

$$\int \frac{r^2}{(r^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{r^2+1} - \frac{1}{(r^2+1)^2}\right) dr$$

باستخدام التكامل بالتعويض:

$$\int \frac{dr}{(r^2+1)^2} \leftrightarrow dr = (tg^2u + 1)du \leftrightarrow r = tgu \leftrightarrow \frac{dr}{r^2+1} = du$$

نعوض في التكامل:
$$\int \frac{r^2}{(r^2+1)^2} = \int \frac{du}{r^2+1} = \int \frac{du}{tg^2u+1}$$

$$tg^2u + 1 = \frac{sin^2u}{cos^2u} + 1 = \frac{sin^2u + cos^2u}{cos^2u} = \frac{1}{cos^2u}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{tg^2u + 1} = cos^2u$$

$$I = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos2u}{2}\right) du = (\frac{1}{2}u + \frac{sin2u}{4})$$

بالنسبة لحدود التكامل نعوض حدود التكامل في العلاقة $r = tgu$

$$tgu = 0 \leftrightarrow u = 0$$

$$\infty = tgu \leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

بالتعويض نجد:
$$\left[\frac{1}{2}u + \frac{sin2u}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{dr}{(r^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{dr}{(r^2+1)^2} = [arctg]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}.1 = \frac{\pi^2}{4}$$

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \iiint_D xy\sqrt{z}dxdydz$$

$$D \equiv \begin{cases} y = 1 \\ y = z \\ y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_{x=-1}^{x=1} xdx \int_{x^2}^{1} ydy \int_{z=0}^{z=y} \sqrt{z}dz$$

$$I_1 = \int_0^y \sqrt{z}dz = \left[\frac{2}{3}\sqrt{z^3}\right]_0^y = \frac{2}{3}\sqrt{y^3}$$

$$I_2 = \frac{2}{3}\int_{y=x^2}^{y=1} \sqrt{y^5}dy = \left[\frac{2}{3}.\frac{2}{7}.y^{\frac{7}{2}}\right]_{x^2}^1 = \frac{4}{21} - \frac{4}{21}x^7 = \frac{4}{21}(1 - x^7)$$

$$I = \frac{4}{21}\int_{-1}^{1} x(1 - x^7)dx = \frac{4}{21}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^9}{9}\right]_{-1}^1$$

$$= \frac{4}{21}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9}\right) = -\frac{8}{189}$$

حل وظائف التكامل الخطي

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_{\Gamma}(x^2 + y^2)dl$$

على Γ $\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$x = 5cost \qquad y = 5sint \qquad z = \sqrt{11}t$$

$$dx = -5sintdt \qquad dy = 5costdt \qquad dz = \sqrt{11}dt$$

الحل :

$$dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}dt$$

نعوض :

$$dl = \sqrt{25sin^2t + 25cos^2t + 11}$$

$$dl = \sqrt{25 + 11} = \sqrt{36} = 6$$

نعوض في التكامل المعطى :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (25sin^2t + 25cos^2t)6dt$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 25.6dt = [150t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 75\pi$$

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_{\Gamma} \frac{y}{x} dl$$

حيث Γ هو الجزء من القطع المكافئ المعطى بالمعادلة $2y = x^2$ واالذي يصل بين النقطتين

$$A\left(1, \frac{1}{2}\right) \; , B(2, 2)$$

$$dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t dt} \quad = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \; dt$$

$$= \frac{1}{dt}\sqrt{dx^2 + dy^2 dt} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dl \; (*)$$

نعوض في $(*)$ $\; y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow dy = xdx$

$$dl = \sqrt{dx^2 + (xdx)^2} = dx\sqrt{1 + x^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} . \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

$$I = \int_1^2 \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} dx = \int_1^2 2 . \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} . dx$$

$$I = \frac{1}{2} [\frac{2}{3}\sqrt{(1 + x^2)^3}]_1^2 = \frac{1}{3}\left((5)^{\frac{3}{2}} - (2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}(11,1 - 2,82) = 0,65$$

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_{\Gamma} 4sin4tdl$$

حيث أن $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ و

$$\Gamma \equiv x = sin^2t\,, \qquad y = cos^2t\,, \qquad z = t$$

$x'_t = 2costsint \qquad\qquad dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}$

$y'_t = -2sintcost$

$z'_t = 1$

$$\Rightarrow \ = \sqrt{4cos^2tsin^2t + 4cos^2tsin^2t + 1}$$

$$= \sqrt{8cos^2tsin^2t + 1}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4sint\sqrt{8\cos^2 t\sin^2 t + 1}\,dt \quad (*)$$

$$8cos^2tsin^2t + 1 = 2.(2cost.sint)^2 + 1$$

$$= 2.sin^2 2t + 1 \ = 1 - cos4t + 1$$

نعوض في $(*)$ $\qquad 8\cos^2 t\sin^2 t + 1 = 2 - cos4t$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4sint\sqrt{2 - cos4t}dt \qquad (**)$$

لكن $\qquad (-cos4t)' = 4sin4t$

نعوض في $(**)$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - cos4t)\sqrt{2 - cos4t}dt$$

$$I=\frac{3}{2}\left[\sqrt{(2-cos4t)^3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I=\frac{2}{3}\left[(2+1)^{\frac{3}{2}}-(2-1)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}\left((3)^{\frac{3}{2}}-1\right)=2,79$$

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I=\int_{\Gamma}(x+y)dl$$

حيث Γ **C(1,0) B(0,1) O(0,0)**

الحل : لحل هذا التكامل نجزء المثلث الى ثلاث قطع مستقيمة نكامل كل منها على حدة

ويحسب التكامل النهائي من مجموع هذه التكاملات الثلاثة

$$I=I_1+I_2+I_3$$

لحل هذا التكامل نحول **oB** للإحداثيات الوسيطية

من القانون

$$\frac{x-x_i}{x_0-x_B}=\frac{y-y_i}{y_0-y_B}=t$$

حيث (y_i, x_i) هي إحداثيات إحدى النقطتين $(0,B)$

أي

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{1}=t \leftrightarrow x=0\ ,\qquad y=t\rightarrow dy=dt$$

لإيجاد حدود التكامل نعوض احداثيات النقطية **OB**في الإحداثيات الوسيطية

$$y=1 \leftrightarrow t=1\ ,\qquad y=0\leftrightarrow t=0$$

نحسب ال $d(l)$

$$d(l)=\sqrt{0+1}=1$$

$$I_1=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

ملاحظة 2 : ان القطعة المستقيمة**oc** تساوي القطعة المستقيمة **oB** أي يمكننا ان نقول

$$I_2 = I_1$$

لحساب I_3 نفس الطريقة السابقة المتبعة

$$I_3 = \int_{Bi} (x + y)\, dy$$

$$\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B} = t$$

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 1}{-1} = t \ \leftrightarrow x = t\,, \qquad y = 1 - t \ \rightarrow dy = -dt$$

لحساب حدود التكامل نعوض **t** في كلا من **x,y** في النقطتين **a,b**

$$x = t \ \rightarrow (1, 0) \ \rightarrow t = 1$$
$$y = 1 - t \ \rightarrow 0 = 1 - t \ \rightarrow t = 1$$

$$x = t \ \rightarrow B(0, 1) \rightarrow t = 0$$
$$y = 1 - t \ \rightarrow 1 - t = 1 \ \rightarrow t = 0$$

$$d(l) = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$I = \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2} \int_0^1 (1)\, dt = \sqrt{2}[t]_0^1 = \sqrt{2}$$

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$$

حل وظائف التحليل الشعاعي

احسب مايلي:

ليكن : $\vec{f} = (x + cy + az)\vec{\imath} + (x + y2\ + bz)\vec{\jmath} + (cy + z^2\ )\vec{k}$

أوجد كل من قيمة c b , a ليكون الحقل كموني

ثم أوجد كمونه العددي U ثم احسب تفرق التابع الشعاعي الناتج $\vec{f}$

الحل :

معرف دوما , لأن مركباته كثيرات حدود , ويجب أن يحقق $\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + cy + \alpha z & x + y^2 + bz & cy + z^2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$(c - b)\hat{\imath} - (0 - a)\hat{\jmath} + (1 - c)\hat{k} = \vec{0} \Rightarrow\ c = b, a = 0, c = 1$$

$$\vec{f} = (\mathrm{x} + \mathrm{y})\hat{\imath} + (\mathrm{x} + \mathrm{y}^2 + z)\hat{\jmath} + (y + z^2\ )\hat{k}$$

بفرض U هو االكمون العددي للشعاع الكموني $\vec{f}$ فإن

$$\vec{f} = \nabla\vec{U}\ ; \vec{f} = \frac{\partial U}{\partial x}\ \hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\ \hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\ \hat{k} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y \Rightarrow U = \frac{x^2}{2} + yx + \varphi_1(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + y^2 + z \Rightarrow U = xy + \frac{y^3}{3} + zy + \varphi_2(x, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x + y^2 \Rightarrow U = yz + \frac{z^3}{3} + \varphi_3(x, y)$$

$$\Rightarrow U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + xy + zy + c$$

$$\vec{\nabla}.\vec{f} = \nabla^2 U; \quad \vec{\nabla}.\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial z} = 1 + 2y + 2z$$

مثال 7

مثال: اذا كان: $\vec{F} = (\hat{\imath}\cdot\vec{r})\vec{r}$

1- $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)$ 2- $\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)$

الحل: 1-

$$\vec{\imath}\cdot\hat{r} = (1,0,0)(x,y,z) = \mathbf{x} \quad \Rightarrow$$

$$\cdot\vec{F} = x^2\cdot\hat{\imath} + xy\cdot\hat{\jmath} + xz\cdot\hat{k}$$

1- $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \vec{U} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & xz \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} - z\hat{\jmath} + y\hat{k} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right) = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

2- $\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -z & y \end{vmatrix}$$

$$= (1+1)\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right) = 2\hat{\imath}$$

مثال2:

احسب: $\vec{\nabla}.\left[\vec{\nabla}\wedge(\vec{r}.\ln r)\right]$

الحل: بالاستفادة من الخاصة التالية :

$$\vec{\nabla}\wedge(U.\vec{F}) = (\vec{\nabla}.U)\wedge\vec{F} + U.(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{r}.\ln r) = (\vec{\nabla}.\ln r)\wedge\vec{r} + \ln r.(\vec{\nabla}\wedge\vec{r})$$

لكن $(\vec{\nabla}\Lambda\vec{r}) = \vec{0}$ لذا الآن لنحسب $(\vec{\nabla}.\ln r)\wedge\vec{r}$

$$\vec{\nabla}.\ln r = \frac{\partial(\ln r)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(\ln r)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial(\ln r)}{\partial z}\hat{k}$$

حيث $\ln r = \ln((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}})$

لنحسب الآن كلا من $\frac{\partial(\ln r)}{\partial z}$ و $\frac{\partial(\ln r)}{\partial y}$ و $\frac{\partial(\ln r)}{\partial x}$

$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial x} = \frac{\partial \ln((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}})}{\partial x} = \frac{x}{r}.\frac{1}{r}$$

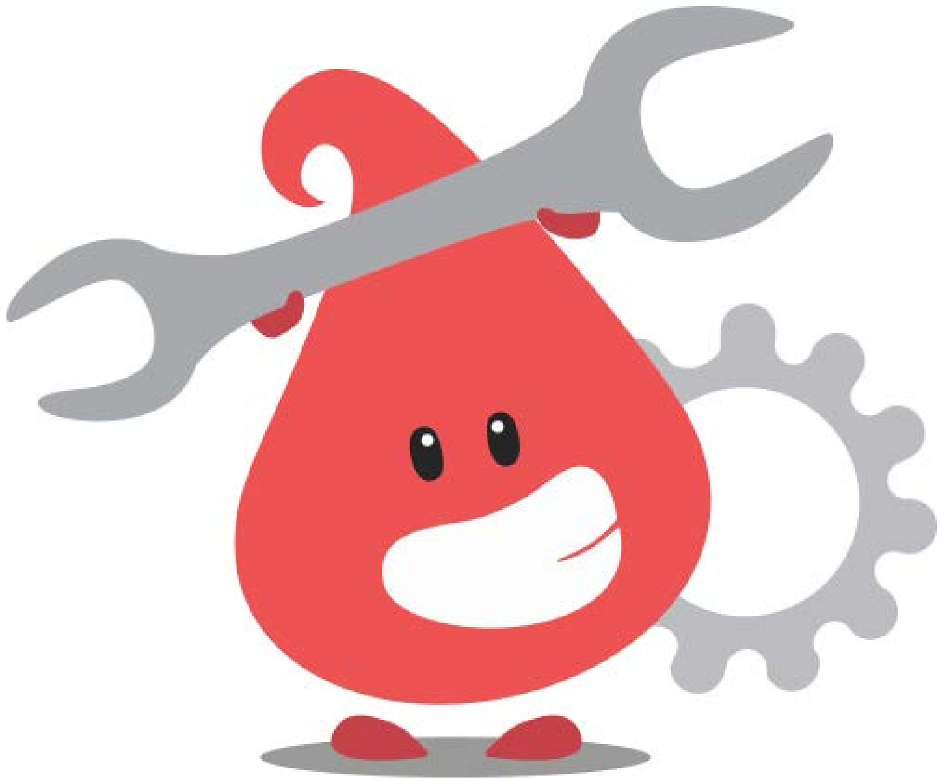
$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial y} = \frac{\partial \ln((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}})}{\partial y} = \frac{y}{r}.\frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial z} = \frac{\partial \ln((x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}})}{\partial z} = \frac{z}{r}.\frac{1}{r}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{r}.\ln r) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial(\ln r)}{\partial x} & \frac{\partial(\ln r)}{\partial y} & \frac{\partial(\ln r)}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

بفك هذا المحدد ينتج لدينا المتجه الصفري أي $0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$ أي $\vec{\nabla}\wedge(\vec{r}.\ln r) = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} = (1+1)\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) = 2\hat{\imath}$$

يرجى من طلابنا الأعزاء مراجعة المحاضرة الثالثة عشر نظري من أجل حل تمارين التحليل الشعاعي لأنها محلولة من قبل الدكتور منير الترك .